

MATEMÁTICAS EMPRESARIALES II. Diplomatura de Ciencias Empresariales.
Junio 2007 1ª semana.

Instrucciones para realizar el examen:

- La duración del examen es de 2 horas.
- Cualquier respuesta no desarrollada debidamente no será evaluada.
- Entregue **un sólo cuadernillo** con las respuestas. Cualquier hoja adicional que se entregue no será corregida.
- Se permite la utilización de calculadora no programable.
- Cada problema se calificará entre 0 y 2.5 puntos (1 punto para el apartado de teoría y 1.5 puntos para el ejercicio).

PROBLEMA 1

Resuelve los siguientes apartados

- Definición de límite infinito.
- $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\operatorname{sen} x}$

PROBLEMA 2

Resuelve los siguientes apartados

- Propiedades de la derivada.
- Determina el ingreso marginal cuando $x = 200$ si la ecuación de demanda es $x + 80p = 800$.

PROBLEMA 3

Resuelve los siguientes apartados:

- Enuncie el teorema de Schwartz.
- Verifique que la función $F(x, y) = xy^2 e^{x^2+y^2}$ cumple el teorema de Schwartz

PROBLEMA 4

Resuelve los siguientes apartados:

- Enuncie las condiciones que debe verificar un punto para ser un mínimo de una función de dos variables.
- Determine los mínimos de la siguiente función:

$$F(x, y) = xy^2 + x^2y - xy$$

PROBLEMA 1

Resuelve los siguientes apartados

a) Definición de límite infinito.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\text{sen}x}$

a) La definición de límite infinito está en la pág 16 del libro de teoría.

b) Calculamos el límite suponiendo $x > 0$, de esta forma existe $\ln(x)$.

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\text{sen}x} \Rightarrow \ln L = \lim_{x \rightarrow 0} (\text{sen}x \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{\text{sen}x}}$$

Así hemos transformado una indeterminación el tipo 0^0 , en el tipo $\frac{\infty}{\infty}$, y podemos aplicar la regla de L'Hopital.

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{\text{sen}x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{(\text{sen}x)^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\text{sen}x)^2}{-x \cdot \cos x}$$

Separamos este límite en dos factores.

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\text{sen}x)^2}{-x \cdot \cos x} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}x}{-x} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}x}{\cos x} \right) = -1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow L = e^0 = 1$$

El problema lo tenemos en valores con $x < 0$, en este caso no existe $\ln(x)$. No podemos usar ese razonamiento. Sólo podemos afirmar que el límite por la derecha es 1.

PROBLEMA 2

Resuelve los siguientes apartados

a) Propiedades de la derivada.

b) Determina el ingreso marginal cuando $x = 200$ si la ecuación de demanda es $x + 80p = 800$.

a) Las propiedades de la derivada corresponde a la pág 61 del libro.

b) Este es un ejercicio de aplicaciones económicas.

x es la cantidad del producto que se vende, p es el precio de cada unidad. Estas dos variables están relacionadas mediante esa ecuación de demanda ($x + 80p = 800$), en la que algunas veces nos interesa despejar p y otras veces interesa despejar x .

En este caso debemos calcular el ingreso, que será el producto de las unidades vendidas por el precio de cada unidad.

$I(x) = x \cdot p(x)$. Debemos despejar p de la ecuación $\rightarrow p(x) = (800-x)/80$

$$I(x) = x \cdot \frac{800-x}{80} = 10x - \frac{x^2}{80}$$

Para calcular el ingreso marginal en $x=200$, debemos derivar $I(x)$ y sustituir $x=200$.

$$I'(x) = 10 - \frac{x}{40} \Rightarrow I'(200) = 10 - \frac{200}{40} = 10 - 5 = 5$$

PROBLEMA 3

Resuelve los siguientes apartados:

- Enuncie el teorema de Schwartz.
- Verifique que la función $F(x, y) = xy^2 e^{x^2+y^2}$ cumple el teorema de Schwartz

a) El teorema de Schwartz está al principio de la pág 246 del libro de teoría.

b) Para comprobar que se cumple el teorema de Schwartz, debemos comprobar que las derivadas cruzadas son iguales, es decir, que $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$.

Calculamos el primer miembro de esa igualdad:

$$F(x, y) = (xy^2) \cdot (e^{x^2+y^2}) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = y^2 e^{x^2+y^2} + xy^2 \cdot 2x \cdot e^{x^2+y^2} = (y^2 + 2x^2 y^2) \cdot (e^{x^2+y^2})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = (2y + 4x^2 y) \cdot (e^{x^2+y^2}) + (y^2 + 2x^2 y^2) \cdot 2y \cdot (e^{x^2+y^2}) =$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = (2y + 4x^2 y + 2y^3 + 4x^2 y^3) \cdot (e^{x^2+y^2})$$

$$F(x, y) = (xy^2) \cdot (e^{x^2+y^2}) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = y^2 e^{x^2+y^2} + xy^2 \cdot 2x \cdot e^{x^2+y^2} = (1 + 2x^2) \cdot y^2 \cdot (e^{x^2+y^2})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = (1 + 2x^2) \cdot [2y \cdot (e^{x^2+y^2}) + y^2 \cdot 2y \cdot (e^{x^2+y^2})] = 2y \cdot (1 + 2x^2) \cdot (1 + y^2) \cdot (e^{x^2+y^2}).$$

Calculamos ahora el 2º miembro de la igualdad, intentando simplificar de forma parecida:

$$F(x, y) = (xy^2) \cdot (e^{x^2+y^2}) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = 2xy e^{x^2+y^2} + xy^2 \cdot 2y \cdot e^{x^2+y^2} = (1 + y^2) \cdot 2xy \cdot (e^{x^2+y^2})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = (1 + y^2) \cdot [2y \cdot (e^{x^2+y^2}) + 2xy \cdot 2x \cdot (e^{x^2+y^2})] = 2y \cdot (1 + 2x^2) \cdot (1 + y^2) \cdot (e^{x^2+y^2}).$$

Se obtiene el mismo resultado, se cumple el teorema de Schwartz.

PROBLEMA 4

Resuelve los siguientes apartados:

- a) Enuncie las condiciones que debe verificar un punto para ser un mínimo de una función de dos variables.
- b) Determine los mínimos de la siguiente función:

$$F(x,y) = xy^2 + x^2y - xy$$

a) Para la existencia de extremos relativos hay un teorema en la pág 281 del libro, y un esquema de los pasos a seguir para localizarlos en la pág 283.

b) En primer lugar buscamos los puntos críticos de la función.

$$F(x, y) = xy^2 + x^2y - xy \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = y^2 + 2xy - y = 0 \rightarrow y \cdot (y + 2x - 1) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2xy + x^2 - x = 0 \rightarrow x \cdot (2y + x - 1) = 0 \end{cases}$$

Obtenemos varias soluciones:

Si en la 1ª ecuación $y=0 \rightarrow$ En la 2ª podemos obtener $x=0$ o $x=1$. Por lo que ya tenemos dos puntos críticos: $(0,0)$ y $(1,0)$.

Si en la 2ª ecuación $x=0$, por el mismo método anterior tenemos $(0,0)$ y $(0,1)$.

Pero si $x \neq 0$, e $y \neq 0$. Entonces se debe cumplir $(y+2x-1=0)$ y $(2y+x-1=0)$ por lo que obtenemos otro punto crítico $(1/3, 1/3)$.

Calculamos la matriz hessiana. $Hess(f) = \begin{pmatrix} 2y & 2y + 2x - 1 \\ 2y + 2x - 1 & 2x \end{pmatrix}$

$$Hess(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0 \Rightarrow \text{Hay un punto de ensilladura en } (0,0).$$

$$Hess(f)(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0 \Rightarrow \text{Hay un punto de ensilladura en } (0,1).$$

$$Hess(f)(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 < 0 \Rightarrow \text{Hay un punto de ensilladura en } (1,0).$$

$$Hess(f)\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3} > 0, \text{ además } \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{2}{3} > 0.$$

Hay un mínimo en $(1/3, 1/3)$.